Corrigé

Exercice 1

a) $x \in [4\,;7]$
b) $x \in [9\,;+\infty[$
c) $x \in]-4\,;0]$
d) $x \in [2\,;8[$
e) $x \in]-\infty\,;-1[$
f) $x \in]-3\,;6[$

Exercice 2

a) Df = $[-5\,;8]$.
b) $f(-2) = 6$ et $f(0) = 5$
c) L'unique antécédent de –2 par *f* est 5.
Les antécédents de 0 par *f* sont : 3 et 6.
7 n'admet aucun antécédent par *f* sur Df.
d) *f* est strictement croissante sur $[-5\,;-2]$ et sur $[5\,;8]$.
f est strictement décroissante sur $[-2\,;5]$.
e) Le maximum de *f* sur Df est $f(-2) = 6$ et le minimum de *f* sur Df est $f(5) = -2$.
f) Tableau de variations :

x	–5		–2		5		8
Variation de f	1	↗	6	↘	–2	↗	5

Exercice 3

$f(x) = -2x^2 - x + 1$.

1) $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{35}{9}$ $f(-2) = -5$.

2) $f(1) = -2$ donc $\boxed{A(1\,;-2) \in Cf}$.

$f(\sqrt{2}) = -3 - \sqrt{2} \neq -4{,}41$ donc $\boxed{B(\sqrt{2}\,;-4{,}41) \notin Cf}$.

3) On $f(2) = -9$ donc **2 n'est pas un antécédent de –5 par *f*.**

Exercice 4

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$.

1) A l'aide de la calculatrice, donner un tableau de valeurs de $f(x)$ pour des valeurs de x allant de –2 à 8 avec un pas de 1.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	-8	-5.25	-3	-1.25	0	0.75	1	0.75	0	-1.25	-3

2) Donner deux antécédents de 0 par *f*. 2 et 6 sont deux antécédents de 0 par *f*.
Vérifier par le calcul. On calcule $f(2)$ et $f(6)$ et on trouve $f(2) = 0$ et $f(6) = 0$.

Exercice 5

$f(x) = -2(3x - 1)^2$.

1) Les antécédents de 4 par *f* sont les solutions de l'équation $f(x) = 4$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 0$. Donc l'équation $f(x) = 4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{On en déduit que 4 n'a pas d'antécédent par } f.}$

2) Les antécédents de –6 par *f* sont les solutions de l'équation $f(x) = -6$.
On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -6$.

$$\begin{aligned} f(x) = -6 &\Leftrightarrow -2(3x-1)^2 = -6 \\ &\Leftrightarrow (3x-1)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt{3} \text{ ou } 3x - 1 = -\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les antécédents de } -6 \text{ par } f \text{ sont : } \frac{1+\sqrt{3}}{3} \text{ et } \frac{1-\sqrt{3}}{3}.}$$

Exercice 6

1. Avec $x = -2$, l'algorithme renvoie la valeur 13.
2. $f(x) = (3x-1)^2 - 9x^2 = -6x + 1$
3. On résout $f(x) = -12071$. on trouve $x = 2012$.

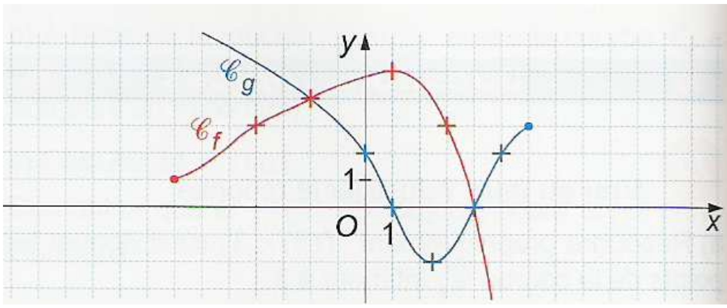
Exercice 7
a) Faux ! car f est croissante sur $[3\,;+\infty[$.
b) Vrai ! car f est décroissante sur $[1\,;3]$.
c) Vrai ! car f est croissante sur $]-\infty\,;1]$ et $f(1) = 7$.
d) On ne peut pas savoir car f n'est pas monotone sur $[\sqrt{2}\,;5]$.

Exercice 8
$f(x) = x^2 + 1$.
a) $f(-2) = 5$ et $f(1) = 2$.
Puisque $-2 < 1$ et $f(-2) > f(1)$ alors f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $f(-1) = 2$ et $f(2) = 5$.
Puisque $-1 < 2$ et $f(-1) < f(2)$ alors f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi f n'est ni croissante sur $\mathbb{R}$ et ni décroissante sur $\mathbb{R}$ donc f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

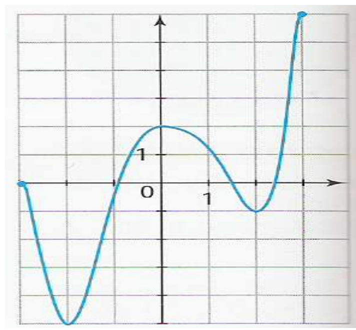
Exercice 9
Deux fonctions f et g sont connues par leur courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-contre.



1) Donner l'ensemble de définition de f.
Df = $[-7\,;+\infty[$

Pour chacune des équations et inéquations suivantes, vous expliquerez votre démarche.
2) Résoudre graphiquement les équations :
a) $f(x) = 3$; S = {-4 ; 3} b) $f(x) = 0$; S = {4} c) $f(x) = 6$; Pas de solution.
3) Résoudre graphiquement les inéquations :
a) $f(x) < 3$; S = $[-7\,;-4[\,\cup\,]3\,;+\infty[$ b) $f(x) \geq 0$; S = $[-7\,;4]$
4) Résoudre graphiquement :
a) $f(x) = g(x)$; S = {4 ; –2} b) $f(x) < g(x)$; S = $[-7\,;-2[\,\cup\,]4\,;6]$

Exercice 10
On donne la représentation graphique d'une fonction f.



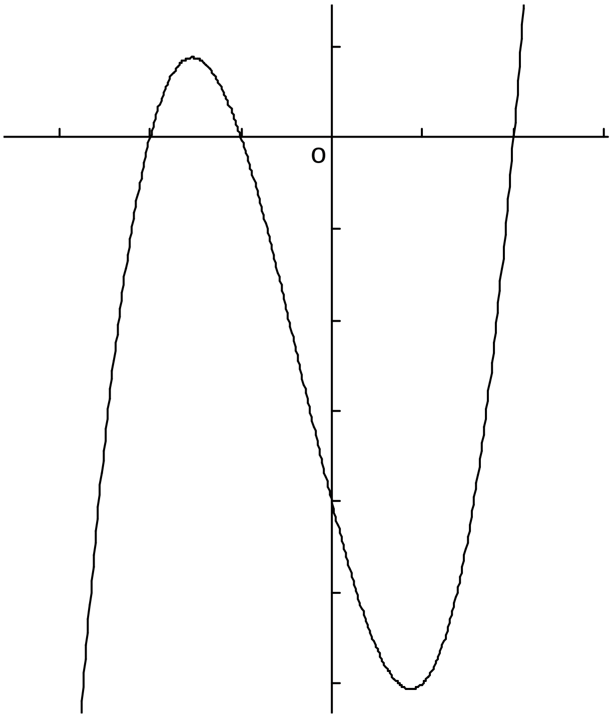
1) Dresser son tableau de variation complet.

x	–3		–2		0		2		3
Variations de f	0	↘		↗	2	↘		↗	6
			–5				–1		

2) Encadrer $f(x)$ le plus précisément possible dans chacun des cas suivants :
a) $x \in [-3; 3]$ **b)** $x \in [-1; 2]$ **c)** $x \in [-3\,; 2]$.

a) Si $x \in [-3; 3]$ alors $-5 \leq f(x) \leq 6$
b) Si $x \in [-1; 2]$alors $-1 \leq f(x) \leq 2$
c) Si $x \in [-3\,; 2]$ alors $-5 \leq f(x) \leq 2$.

Exercice 11
La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3\,; 3]$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.
1. A l'écran de la calculatrice la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-3\,; 3]$.



Les antécédents de 0 par *f* semblent être -2 ; -1 et 2.

2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 - 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = f(x)$.

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ ou $x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ ou $x = -1$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = -1$.

S = {-2 ; -1 ; 2}

Exercice 12

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2(2 - x)$ et $g(x) = 2 - x$.

1) On résout l'inéquation $f(x) > 0$.

Pour cela, on dresse un tableau de signe de $f(x)$.

Valeurs d'annulation :

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2		+	0	+		+	
$2 - x$		+		+	0	–	
$f(x)$		+	0	+	0	–	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est S = $]-\infty ; 0[\cup]0 ; 2]$.

2) On résout l'inéquation $f(x) < g(x)$.

On se ramène à une comparaison à 0.

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2(2 - x) < 2 - x$

$\Leftrightarrow x^2(2 - x) - (2 - x) < 0$

$\Leftrightarrow (2 - x)(x^2 - 1) < 0$

$\Leftrightarrow (2 - x)(x - 1)(x + 1) < 0$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$2 - x$		+		+		+	0	–	
$x - 1$		–		–	0	+		+	
$x + 1$		–	0	+		+		+	
$(2 - x)(x - 1)(x + 1)$		+	0	–	0	+	0	–	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est S = $]-1 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$.