Exercices fonctions trinômes, fonctions homographiques

Exercice 1

Tableau de variations des fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 5$ et

$g(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$.

f et g sont deux fonctions trinômes.

x	$-\infty$		**2**		$+\infty$
f		$\searrow$	**5**	$\nearrow$	

x	$-\infty$		**–3**		$+\infty$
g		$\nearrow$	**–1**	$\searrow$	

Exercice 2

On considère les trois expressions d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

- $f(x) = 2x^2 + 10x - 12$.
- $f(x) = 2(x-1)(x+6)$.
- $f(x) = 2(x+\frac{5}{2})^2 - \frac{49}{2}$.

1. Identifier chacune de ces formes.

$f(x) = 2x^2 + 10x - 12$. Forme développée.
$f(x) = 2(x-1)(x+6)$. Forme factorisée.
$f(x) = 2(x+\frac{5}{2})^2 - \frac{49}{2}$. Forme canonique.

2. Choisir la forme la mieux adaptée pour :

a. Calculer l'image de –6, de 0, de $-\frac{5}{2}$.

$f(-6) = 0$ avec la forme factorisée.
$f(0) = -12$ avec la forme développé.
$f(-\frac{5}{2}) = -\frac{49}{2}$ avec la forme canonique.

b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -6$.

c. Résoudre l'équation $f(x) = -12$.

$f(x) = -12 \Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 12 = -12$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x = 0$
$\Leftrightarrow 2x(x+10) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -10$.

d. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{15}{2}$.

$f(x) = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 2(x+\frac{5}{2})^2 - \frac{49}{2} = \frac{15}{2}$

$\Leftrightarrow 2(x+\frac{5}{2})^2 - 32 = 0$

$\Leftrightarrow 2[(x+\frac{5}{2})^2 - 16] = 0$

$\Leftrightarrow (x+\frac{5}{2})^2 - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{5}{2} - 4)((x + \frac{5}{2} + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})(x + \frac{13}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{13}{2}.$$

Exercice 3

a) $f(x) = x + \dfrac{2x}{x+1}$ b) $g(x) = 2 - \dfrac{4-3x}{2x+3}$

$D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$ et $D_g =]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2} ; +\infty[$

Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x+1}$. La fonction f n'est pas homographique !

Pour tout $x \in D_g$, $g(x) = \dfrac{7x+2}{2x+3}$. La fonction g est homographique !

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4-2x}{x-1}$.

1. Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq -1$ est :
$S =]-\infty ; 1[\cup [3 ; +\infty[$

2. Par le calcul : on résout dans $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

$$f(x) \leq -1 \Leftrightarrow \frac{4-2x}{x-1} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-2x}{x-1} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+3}{x-1} \leq 0$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x+3}{x-1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; 1[\cup [3 ; +\infty[$