Exercice 1

La suite géométrique (v_n) est définie par $v_1 = 16$ et pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

1. Calculer v_2 et v_3.
2. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, exprimer v_n en fonction de n. Puis calculer v_{11}.
3. Calculer $S_{11} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{11}$ (arrondir à 10^{-2}).
4. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n). Justifier.

Exercice 2

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n : $u_n > 0$.

1. Calculer u_1 et u_2. Que peut-on en déduire pour cette suite ? (On ne demande pas de justifier.)
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n par : $a_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$.
   (a) Calculer a_0 et a_1.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.
   (c) Donner alors, l'expression de a_n en fonction de n.
3. (a) En déduire une formule explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en justifiant.
   (c) Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (On ne demande pas de justifier.)

Exercice 3

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n - 2$.
   (a) Calculer w_0 et prouvez que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$. Quelle est la nature de la suite (w_n) ?
   (b) Exprimez w_n en fonction de n.
   (c) Quel est le sens de variation de la suite (w_n) ? Justifiez votre réponse.
2. (a) Déduisez des questions précédentes le sens de variation de la suite (u_n) et l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Pourquoi peut-on affirmer que pour tout entier naturel n, $u_n > 2$?
   (c) En utilisant la calculette, déterminez le plus petit entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n - 2 < 10^{-3}$. Expliquez rapidement votre façon de faire.