Trigonométrie – Exercices - Corrigé

Exercice 1.

1. x réel,
   a. $A(x) = \cos(-x) - \sin(x+\pi) + \sin(-x) + \cos(\pi - x)$
   $A(x) = \cos(x) - (-\sin(x)) - \sin(x) - \cos(x) = 0$
   b. $B(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos(-x-\pi) - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(x + 8\pi)$
   $B(x) = \sin(x) + 2\cos(-(x+\pi)) - 3\cos(x) - \sin(x)$
   $B(x) = 2\cos(x+\pi) - 3\cos(x) = -2\cos(x) - 3\cos(x) = -5\cos x$
2.
   a. On donne $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

$$\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{5} = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{16}{16} - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{16-6-2\sqrt{5}}{16}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \; ou \; \sin\frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$\frac{\pi}{5} \in [0;\ \pi]$, donc $\sin\frac{\pi}{5} \geq 0$ et $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

   b.
   - $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
     $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
   - $\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi$ donc $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$
     $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
     $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
   - $\frac{7\pi}{10} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{7\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}$
     $\cos\frac{7\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
     $\sin\frac{7\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
3. $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$
   $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$
4. x est un réel tel que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ et $\sin x = \frac{1}{3}$.
   a. On a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{1}{9} = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$$
$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \; ou \; \cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Or $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, donc $\cos x \leq 0$ et $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b.

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{7}{9}$

$\sin(2x) = 2\cos x \sin x = 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{-4\sqrt{2}}{9}$

$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = -\frac{7}{9} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{-4\sqrt{2}}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{11\sqrt{2}}{27}$

$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x = \frac{-4\sqrt{2}}{9} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + -\frac{7}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{27}$

Exercice 2.

1. Pour tout réel x,

$$(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x - (\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x)$$
$$= 1 + \sin 2x - (1 - \sin 2x) = 1 + \sin 2x - 1 + \sin 2x = 2\sin 2x.$$

2. Pour tout réel x,

D'une part :

$$(1 + \cos x + \sin x)^2 = (1^2 + 2 \times 1 \times (\cos x + \sin x) + (\cos x + \sin x)^2)$$
$$= 1 + 2\cos x + 2\sin x + 1 + \sin 2x = 2 + 2\cos x + 2\sin x + 2\cos x \sin x$$
$$= 1 + 2\cos x + 2\sin x + 1 + \sin 2x = 2(1 + \cos x + \sin x + \cos x \sin x)$$

D'autre part :

$2(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2(1 + \sin x + \cos x + \cos x \sin x)$

Ainsi pour tout réel x on a :

$$(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$$

Exercice 3. Résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique (noté $\boldsymbol{C}$).

1.

a. $\boldsymbol{\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ est $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\,;\ -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}\right\}$.

b. $\boldsymbol{\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ 2x = \frac{\pi}{12} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = \frac{\pi}{24} + l\pi, l \in \mathbb{Z}$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est $S = \left\{\frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\,;\ \frac{\pi}{24} + l\pi, l \in \mathbb{Z}\right\}$.

c. $\boldsymbol{\sin x + 1 = 0} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \sin -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = -\frac{3\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

Or $-\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = -1$ est $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d. $\boldsymbol{2\sin x + 1 = 0} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin -\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

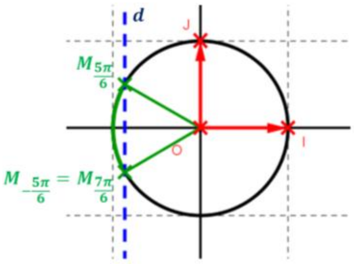
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ OU\ x = \frac{4\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $2\sin x + 1 = 0$ est $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\,; \frac{4\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}\right\}$.

2.

a. $\boldsymbol{\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Pour résoudre l'inéquation $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, on trace le cercle C et on trace la droite d'équation $d: x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les réels x solutions de l'inéquation sont les réels x dont les abscisses des points images sur C sont inférieures strict à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (partie verte).



Par lecture graphique,
sur $]-\pi;\ \pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

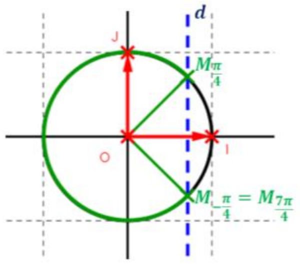
$$S = \left]\frac{5\pi}{6};\ \pi\right] \cup \left]-\pi;\ -\frac{5\pi}{6}\right[$$

sur $[0; 2\pi[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left]\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right[$$

b. $\boldsymbol{\sqrt{2}\cos x - 1 \leq 0} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos x \leq 1 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos\frac{\pi}{4}$.

Pour résoudre l'inéquation $\cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on trace le cercle C et on trace la droite d'équation $d: x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Les réels x solutions de l'inéquation sont les réels x dont les abscisses des points images sur C sont inférieures ou égales à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (partie verte).



Par lecture graphique,
sur $]-\pi;\ \pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left[\frac{\pi}{4};\ \pi\right] \cup \left]-\pi;\ -\frac{\pi}{4}\right]$$

sur $[0; 2\pi[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left[\frac{\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$$

c. $\boldsymbol{\sin x + 1 > 0} \Leftrightarrow \sin x > -1$

Or pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$, et les réels x tels que $\sin x = -1$ sont les réels qui s'écrivent sous la forme :

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

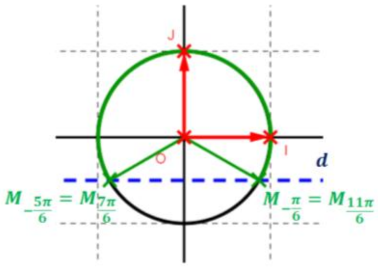
Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin x + 1 > 0$ est $S = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Sur $]-\pi;\ \pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left]-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Sur $[0; 2\pi[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$.

d. $\boldsymbol{2\sin x + 1 > 0} \Leftrightarrow \sin x > -\frac{1}{2}$

Pour résoudre l'inéquation $2\sin x + 1 > 0$, on trace le cercle C et on trace la droite d'équation $d: y = -\frac{1}{2}$. Les réels x solutions de l'inéquation sont les réels x dont les ordonnées des points images sur C sont supérieures strict à $-\frac{1}{2}$ (partie verte).



Par lecture graphique,
sur $]-\pi;\ \pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left]-\pi;\ -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6};\ \pi\right]$$

sur $[0; 2\pi[$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left[0;\ \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right[$$

Trigonométrie – Exercices - Corrigé

3. Tableau de signes de l’expression $(\mathbf{2}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}+\mathbf{1})$.

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		π
$2\sin x+1$		+	0	-		-	0	+	
$\sin x+1$		+		+	0	+		+	
$(2\sin x+1)(\sin x+1)$		+	0	-	0	-	0	+	